METODOLOGIA NÃO PARAMÉTRICA APLICADA AO DIMENSIONAMENTO EMPÍRICO DE REALCES EM LAVRA POR SUBNÍVEL

Thiago Flávio Silva Vassalo Universidade Federal de Ouro Preto Programa de Pós Graduação em Engenharia Mineral

> Milene Sabino Lana Universidade Federal de Ouro Preto milene@ufop.edu.br

Tiago Pereira Martins Universidade Federal de Ouro Preto

RESUMO

O gráfico de estabilidade é um método empírico utilizado em mina subterrânea para dimensionamento de realces em lavra por subnível. Dois parâmetros, o número de estabilidade *N'* e o raio hidráulico *HR* são usados no gráfico de estabilidade para definir a condição do realce, estável ou instável. O número de estabilidade depende de características geomecânicas do maciço rochoso e o raio hidráulico depende das dimensões do realce. Neste trabalho uma metodologia não paramétrica utilizando a técnica *bootstrap* é desenvolvida para obtenção da condição do realce (estável ou instável). O procedimento contribui para aumentar a objetividade do gráfico de estabilidade. Além disso, não é requerida nenhuma hipótese acerca da forma da distribuição de probabilidade das variáveis.

Palavras chave: gráfico de estabilidade; lavra por subnível; bootstrap não paramétrico; distância de Mahalanobis

ABSTRACT

The stability graph is an empirical method used in underground mining to design stopes in sublevel mine design. Two parameters, the stability number N' and the hydraulic radius HR are used in the stability graph to define the stope status, stable or unstable. The stability number is related to the geomechanical characteristics of the rock mass and the hydraulic radius is related to stope span dimensions. In this research a non-parametric methodology using bootstrap technique is developed to obtain the stability statuses of the stopes (stable and unstable statuses). The procedure contributes to increase the objectivity of the stability graph. Moreover it did not require any hypothesis about the shape of the probability distribution of the variables.

Keywords: stability graph; sublevel stoping; non-parametric bootstrap; Mahalanobis distance

INTRODUÇÃO

O gráfico de estabilidade é uma ferramenta empírica largamente usada em todo o mundo para checar a condição de estabilidade da superfície de um realce em lavra subterrânea por subnível. Nesse gráfico o número de estabilidade *N'* (relacionado às características geomecânicas do maciço rochoso) e o raio hidráulico *HR* (relacionado às dimensões da superfície do realce) são plotados. Ele foi proposto inicialmente por [1] e posteriormente modificado por [2], sendo uma ferramenta rápida para determinar a condição de estabilidade (estável ou instável) de superfícies de realces em lavra por subnível. Para a construção do gráfico os autores coletaram muitos dados provenientes de lavras por subnível em minas no Canadá e Austrália. Novas superfícies de realces em lavra por subnível podem então ser colocadas no gráfico para determinação de sua condição de estabilidade.

A condição de estabilidade é fundamental para definição de regiões estáveis e instáveis no gráfico de estabilidade. As grandes dimensões dos realces em lavra subterrânea por subnível podem causar grandes taxas de diluição do minério. Assim, a fronteira entre regiões estáveis e instáveis é decisiva para aplicação do gráfico de estabilidade na prática de engenharia. [1] e [2] plotaram esta fronteira através de ajuste manual. Para diminuir a subjetividade do gráfico, outros autores, como [3], [4], [5], [6] e [7] aplicaram abordagens estatísticas para definir esta fronteira.

Técnicas de análise discriminante podem ser usadas para delinear a fronteira entre regiões estáveis e instáveis no gráfico de estabilidade. [5], [6] e [7] aplicaram essa técnica a grupos de dados estáveis e instáveis, considerando que N' e HR seguem distribuições normais. Entretanto, dada a dificuldade da normalidade desses dados, uma abordagem não paramétrica foi desenvolvida neste trabalho. A técnica *bootstrap não paramétrica* foi utilizada para gerar distribuições empíricas da distância de Mahalanobis, usada para separar grupos de dados estáveis e instáveis.

O GRÁFICO DE ESTABILIDADE

O gráfico de estabilidade foi proposto por [1] para dimensionamento de realces em mina subterrânea cuja extração do minério se dá pelo método de lavra por subnível. O banco de dados consiste de 50 estudos de casos. [2] adicionou 125 casos aos dados originais, calibrando os parâmetros utilizados para plotar o gráfico. O número de *N*', na proposta de [2] é dado pela Equação 1.

$$N' = \frac{RQD}{J_n} \times \frac{J_r}{J_a} \times A \times B \times C$$
(1)

Onde RQD é o índice de qualidade de rocha, J_n é o índice para as famílias de descontinuidades, J_r é o índice para a rugosidade das descontinuidades e J_a é o índice para a alteração das descontinuidades. Esses parâmetros definem o índice de qualidade modificado Q', obtido a partir do índice Q de qualidade de rocha proposto por [8].

A é o fator de tensão, baseado na razão da resistência à compressão uniaxial da rocha intacta (σ_c) pela máxima tensão induzida (σ_1), agindo no centro da superfície do realce considerada, Equação 2.

$$\begin{aligned}
\sigma_c / \sigma_1 &\leq 2, & A = 0.1 \\
2 &\leq \sigma_c / \sigma_1 &\leq 10, & A = 0.1125(\sigma_c / \sigma_1) - 0.125 \\
\sigma_c / \sigma_1 &> 10, & A = 1
\end{aligned}$$
(2)

B é o fator de orientação das descontinuidades, que leva em conta a influência das descontinuidades nas faces dos realces. Varia entre 0,2 e 1 e pode ser determinado pela diferença entre a orientação da descontinuidade crítica e a orientação da face do realce.

Quando a descontinuidade crítica faz um ângulo pequeno com a superfície do realce, uma ponte de rocha intacta pode formar, agindo como uma viga, podendo se romper pelo efeito do desmonte a fogo, tensão ou mesmo outra descontinuidade. Sua influência é maior quando a direção da descontinuidade é a mesma da superfície do realce e menor quando a direção da descontinuidade é perpendicular à superfície do realce.

C é o fator que leva em conta os efeitos da gravidade. Considera o mecanismo de ruptura por queda de blocos do teto do realce, variando entre 0,3 e 1. Este fator também considera deslizamento de blocos das paredes dos realces e nesse caso varia de 2 a 8.

Os fatores A, B e C podem ser determinados graficamente como mostrado por [2].

O raio hidráulico *HR* é um fator de forma, calculado pela Equação 3.

$$HR = \frac{\text{Área da seção transversal da superfície do realce}}{\text{Perímetro da superfície do realce}}$$
(3)

[1] e [2] definiram três regiões no gráfico de estabilidade: estável, potencialmente instável e instável (Figura 1). A zona acima das curvas na Figura 1 é a região estável e a região instável é a zona abaixo das curvas. Uma zona de transição entre essas duas regiões é definida como a região potencialmente instável.

[9] usou os limites propostos por [2] para plotar estudos de casos de minas brasileiras (Figura 1). Os estados de estabilidade foram utilizados para classificar os realces na Figura 1. Fica evidente da observação da Figura 1 que os limites propostos por [2] não representam adequadamente os casos de minas brasileiras plotados no gráfico. O número de pontos plotado na Figura 1 é pequeno e o ambiente geomecânico utilizado na construção do gráfico é bastante diferente daquele presente nas minas brasileiras; o que não permite uma análise conclusiva.



Figura 1 Gráfico de estabilidade proposto por [2] com pontos plotados de estudos de casos de minas brasileiras [9].

Propostas para traçado da zona de transição do gráfico de estabilidade

A transição entre as regiões instável e estável na Figura 1 é um fator fundamental na construção do gráfico de estabilidade. [1] e [2] traçaram esses limites pelo seu ajuste a grupos de dados provenientes de minas canadenses e australianas. Apesar do grande número de casos estudados por estes autores, o ajuste das curvas foi essencialmente um processo de tentativa e erro.

Para diminuir a subjetividade do gráfico de estabilidade [6] aplicam a análise discriminante para definição dos grupos estáveis e instáveis. Os autores assumem a distribuição normal bivariada para N' e HR de modo a definir os grupos de estados de estabilidade (Figura 2). Eles fazem cortes nessa distribuição para gerar intervalos de confiança elípticos centrados nas médias, para dados valores de probabilidade, como mostra a Figura 2.



Figura 2 Distribuição normal bivariada, mostrando uma elipse de confiança para uma dada probabilidade, centrada nas médias da distribuição.

Apesar da ideia interessante apresentada por [6] a hipótese de normalidade de N' e HR para os grupos estáveis e instáveis é muito discutível. Esses dados raramente seguem uma distribuição normal, o que prejudica a aplicação do método proposto por [6] na prática de engenharia.

[3] utilizou técnicas de regressão logística para definição das regiões de estabilidade do gráfico, o que permitiu o cálculo de probabilidades para os grupos. Entretanto, novamente as hipóteses de normalidade de *N'* e *HR* foram assumidas para cálculo dos coeficientes da regressão.

A fim de evitar a hipótese de normalidade para a distribuição de *N*' e *HR* uma abordagem não paramétrica foi proposta neste trabalho para definir os grupos estáveis e instáveis no gráfico de estabilidade.

METODOLOGIA

Banco de dados

O banco de dados utilizado é parte daquele apresentado em [10]. É composto de 50 superfícies de realces em lavra por subnível em mina localizada no estado de Minas Gerais. O grupo estável possui 34 elementos e o grupo instável 16.

Na Tabela 1 os elementos do banco de dados são mostrados, com os valores de *N*' e *HR*.

Conjunto dos Realces			
Grupo Estável		Grupo Instável	
N'	HR	N'	HR
0,88	2,37	1,04	11,37
3,18	3,23	2,21	7,61
3,18	3,45	7,04	8,31
1,25	2,69	7,04	7,80
1,25	2,64	2,35	7,62
1,41	3,00	7,04	10,56
1,41	4,57	7,04	15,09
1,41	4,85	1,25	3,19
7,04	8,65	2,57	7,82
0,42	2,68	7,04	7,64
1,25	2,95	0,98	10,53
2,65	3,58	1,22	9,13
7,04	8,92	0,96	10,30
1,25	2,48	1,28	15,07
1,41	2,29	1,08	11,18
1,41	1,78	7,04	11,29
1,13	6,98		
0,97	2,29		
1,41	2,77		
1,41	2,96		
7,04	8,05		
1,25	2,77		
1,41	3,33		
1,41	3,57		
1,41	7,96		
7,04	8,05		
1,25	2,65		
1,20	2,09		
1,41	2,27		
0,83	2,64		
1,41	5,70		
1,41	2,71		
1,41	2,07		
1,41	3,59		

Tabela 1: Banco de dados utilizado [11].

Bootstrap não paramétrico

[11] discorre que quando uma amostra é pequena e não se conhece a distribuição estatística da população pode-se utilizar a metodologia bootstrap para inferir a distribuição amostral empírica partindo da própria amostra.

O método considera a amostra sendo a própria população e partindo dela são realizadas sucessivas reamostragens aleatórias na amostra original coletando múltiplas amostras de mesmo tamanho da amostra original. Cada indivíduo de cada amostra é coletado aletoriamente e reposto antes de se retirar o próximo. Ao fim de cada processo temos uma amostra com mesmo tamanho da amostra original, mas não necessariamente com os mesmos valores. Esse ciclo foi repetido 10.000 vezes, de modo a se obter dados suficientes para calcular a distribuição amostral empírica da variável ou de algum parâmetro estatístico da amostra.

Para cada uma das 10.000 amostras o vetor de médias, a matriz de covariâncias e as distâncias de Mahalanobis (Equação 4) foram determinados.

$$(x - \mu_i)^t \Sigma^{-1} (x - \mu_i) = d^2 (x, \mu_i) \qquad i = 1,2$$
(4)

onde:

 $d^2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_i)$ é a distância de Mahalanobis

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix} \text{ é o vetor de médias de } x_1 \text{ e } x_2,$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{21} & \cdots & \sigma_{22} \end{bmatrix} \text{ é a matriz de covariâncias de } x_1 \text{ e } x_2, \text{ assumindo homocedasticidade.}$$

Importante pontuar que os grupos de *N*' e *HR* não apresentaram normalidade, daí a importância da aplicação do bootstrap não paramétrico.

Deste modo foi construída a distribuição empírica das distâncias de Mahalanobis para cada grupo, Equação 5. Tomando um nível de significância α podemos obter o percentil (1- α) % para cada uma das 10.000 amostras bootstrap. A média desses 10.000 percentis será o valor que definirá no gráfico de estabilidade a elipse de confiança para cada grupo, que será utilizada como o limite dos indivíduos pertencentes a esse grupo.

$$\left(x - \overline{X_i}\right)^T S^{-1}\left(x - \overline{X_i}\right) \le distribuição bootstrap$$
(5)

onde:

 $\overline{X_i}$ é a média amostral S^{-1} é a covariância amostral

A metodologia utilizada é mostrada na Figura 3, para o grupo instável. O mesmo procedimento foi aplicado ao grupo estável.

A metodologia proposta foi implementada utilizando-se o software R [13], cujo script foi desenvolvido por Tiago Pereira Martins e se encontra disponível em [11].



Figura 3: Representação do algoritmo usado para obtenção das distribuições das distâncias de Mahalanobis.

As elipses de confiança bootstrap representam no gráfico de estabilidade a percentagem de elementos cujas distâncias até o vetor de médias são menores ou iguais aos semieixos da elipse. A partir disso podemos delimitar uma fronteira para cada grupo no gráfico de

estabilidade e tomar a interseção entre as elipses de confiança bootstrap como sendo o limite entre esses grupos no plano do gráfico.

Aplicando a metodologia para diferentes níveis de significância é possível encontrar a elipse de confiança bootstrap que apresente sobreposição de dados aceitável entre os grupos e a partir dela traçar uma reta que seja o limite entre os grupos no gráfico de estabilidade.

DISCUSSÃO DE RESULTADOS

As elipses de confiança geradas neste trabalho corresponderam aos percentis 95%, 90%, 85% e 80%. Para os percentis 95% e 90% a sobreposição dos estados de estabilidade foi muito grande. Assim, mesmo representando maiores níveis de confiança tiveram que ser desconsiderados.

As Figuras 4 e 5 mostram as elipses de confiança para os percentis 85% e 80%, respectivamente. Foi adotada a elipse para o percentil 80%, que apresentou a melhor separação.



Figura 4: Elipses de confiança para o percentil 85%: elipse preta (grupo estável), elipse vermelha (grupo instável).



Figura 5: Elipses de confiança para o percentil 80%: elipse preta (grupo estável), elipse vermelha (grupo instável).

Da Equação 5, foram desenvolvidas as equações das elipses de confiança bootstrap para um percentil de 80% para os grupos estável e instável respectivamente. Os resultados são mostrados nas Equações 6 e 7.

$$0,53RH^2 - 2,25HR - 0,90HRN' + 0,66N'^2 + 0,75N' = -0,77$$
(6)

$$0,11HR^2 - 2,05HR - 0,02HRN' + 0,13N'^2 - 0,74N' = -8,58$$
(7)

A partir das Equações 6 e 7, foram obtidos os pontos de intersecção entre as elipses de confiança bootstrap e traçada a reta que será o limite entre os estados de estabilidade no gráfico de estabilidade, dada pela Equação 8.

$$N' = -15,93HR + 85,57 \tag{8}$$

A Figura 6 mostra o gráfico de estabilidade definido pelas elipses (Equações 6 e 7) com a reta limite, intersecção entre as elipses, dada pela Equação 8.



Figura 6: Elipses de confiança com reta limite dos estados de estabilidade.

Como forma de comparar o limite bootstrap com o limite proposto por [2], a Equação 8 foi inserida no gráfico de estabilidade modificado de [2] juntamente com as 50 superfícies de realces utilizados no trabalho, ver Figura 7. O eixo das ordenadas do gráfico de estabilidade com limites propostos por [2] está na escala logarítmica razão pela qual a reta da Equação 8 se apresenta como uma curva.

O limite desenvolvido a partir da metodologia proposta nesse estudo apresenta uma região de estabilidade bem menor em relação ao limite proposto por [2]. Se observarmos a Figura 1, onde todos os dados das minas brasileiras foram plotados, essa região de instabilidade que não se conforma aos limites estabelecidos por [2], como comentado anteriormente.



Figura 7: Gráfico de Estabilidade com limite de [2] e Limite Bootstrap.

Alguns dados de minas brasileiras não incluídos na análise feita neste trabalho e apresentados na Figura 1 mostram que superfícies de realces instáveis e potencialmente instáveis seriam plotadas na região de instabilidade da Figura 7, que para [2] seriam classificadas como estáveis. Tais dados apresentam *N'* maiores que 10 e *HR* maiores que 5. Isso mostra que a metodologia proposta fornece resultados mais coerentes para os realces brasileiros.

Ao aumentar a quantidade de informação da área em estudo e consequentemente o banco de dados é de se esperar que o limite bootstrap passe a refletir a realidade das condições de estabilidade de uma maneira mais rigorosa.

Novos realces podem ser introduzidos no gráfico da Figura 7, permitindo seu dimensionamento ou determinação do estado de estabilidade.

CONCLUSÃO

A metodologia bootstrap não-paramétrico permite a construção de elipses de confiança baseadas nas distancias de Mahalanobis independentemente do conhecimento da distribuição das variáveis *N'* e *HR*. No caso de as variáveis serem normais a distribuição bootstrap das distâncias de Mahalanobis será a quiquadrado; já o bootstrap não paramétrico produz uma distribuição empírica dessas distâncias. O emprego da metodologia bootstrap aumenta a objetividade na obtenção do gráfico de estabilidade, além de permitir a determinação de *intervalos de confiança* para as regiões desse gráfico.

Para se obter uma separação otimizada para o banco de dados do gráfico de estabilidade brasileiro modificado de Potvin é necessário aumentar a quantidade de dados e aplicar a metodologia bootstrap de maneira a reduzir a sobreposição observada quando se utiliza níveis de confiança elevados. O aumento de dados pode melhorar a correlação entre as variáveis do estado instável e produzir um limite bootstrap que expresse uma situação mais próxima da realidade.

Um gráfico de estabilidade geral pode ser obtido se a metodologia apresentada neste trabalho for aplicada a um banco de dados proveniente de ambientes geomecânicos variados e realces de diferentes geometrias porque os métodos estatísticos multivariados fornecem melhores resultados quando há grande variabilidade nos dados de entrada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Mathews, K.E; Hoek, E; Wyllie, D.C; Stewart, S.B.V. (1981) Prediction of stable Excavation spans at depths below 1000m in hard rock mines, CANMET report, DSS serial no OSQ80–00081, 127 p.

[2] Potvin, Y; Hudyma, M; Miller, H.D.S. (1988) The stability graph method for open stope design. CIM AGM, Alberta, 1-28.

[3] Mawdesley, C.A. (2004) Using logistic regression to investigate and improve an empirical design method. Sinorock Symposium, China, v.3A 07.

[4] Nickson, S.D. (1992) Cable support guidelines for underground hard rock mine operations, M.A.Sc. thesis, University of British Columbia.

[5] Suorineni, F.T; Kaiser, P.K; Tannant, D.D. (2001) Likelihood statistic for interpretation of the stability graph for open stope design. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 735 – 744.

[6] Suorineni, F.T. (2012) A critical review of the stability graph method for open stope design. Conference: MassMin, Sudbury.

[7] Papaioanou, A; Suorineni, F.T. (2015) Development of a generalised dilution – based stability graph for open stope design. Jornal of Research Projects Review, Austrália, v.4, 36-43.

[8] Barton, N., Lien, R., Lunde, J. (1974). Engineering Classification of Rock Masses for the design of Tunnel Support, Rock Mechanics, 6 (4): 189-236.

[9] Melo, M.; Pinto C. L. L.; Dutra J. I. G. (2014) Potvin stability graph applied to brazilian geomechanic environment. REM: R. Esc. Minas, Ouro Preto, 67(4): 413-419.

[10] Oliveira, M. M. (2012) Dimesionamento empírico de realces em realce em subníveis. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Minas Gerais: Curso de Pós Graduação em Engenharia Metalúrgica e Mineral. Belo Horizonte.

[11] Vassalo T. F. S. (2017). Metodologia não paramétrica para delimitação dos estados de estabilidade no gráfico de estabilidade. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto: Curso de Pós Graduação em Engenharia Mineral. Ouro Preto.

[12] Johnson, R.W (2001) An Introduction to the Bootstrap. Journal of the Royal Statistical Society, Dakota do Sul, EUA, volume 23: 2.

[13] R Development Core Team (2006). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <u>http://www.R-project.org</u>.